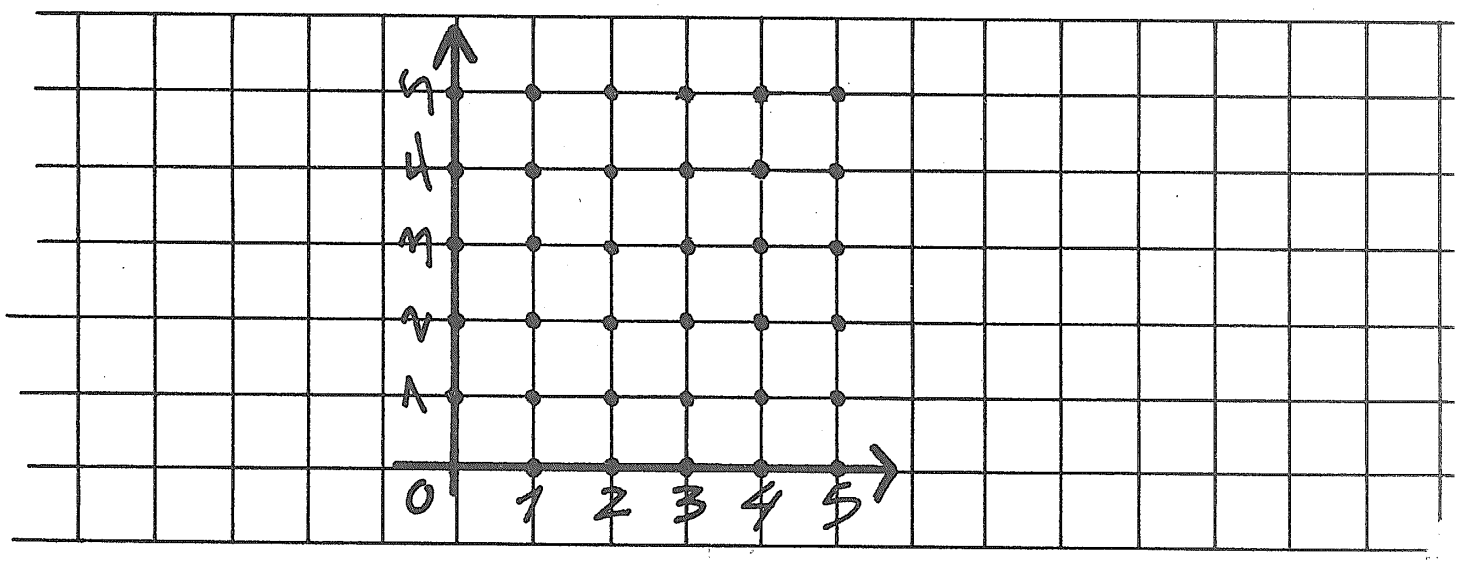
RELACIONES BINARIAS

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana)*:

1. Conjuntos de puntos
2. ***Relaciones binarias***
3. Figuras planas
4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos
5. Polígonos convexos
6. Relación de semejanza
7. Geometría métrica en el plano
8. Cuerpos geométricos

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 4

Geometría euclidiana

Módulo 2

RELACIONES BINARIAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
RELACIONES BINARIAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1241-2

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

2.1 Relaciones de equivalencia

2.2 Relación de igualdad

2.3 Relación de paralelismo

2.4 Ángulo

2.5 Medida (noción intuitiva)

2.6 Relación de congruencia

2.7 Clasificación de los ángulos

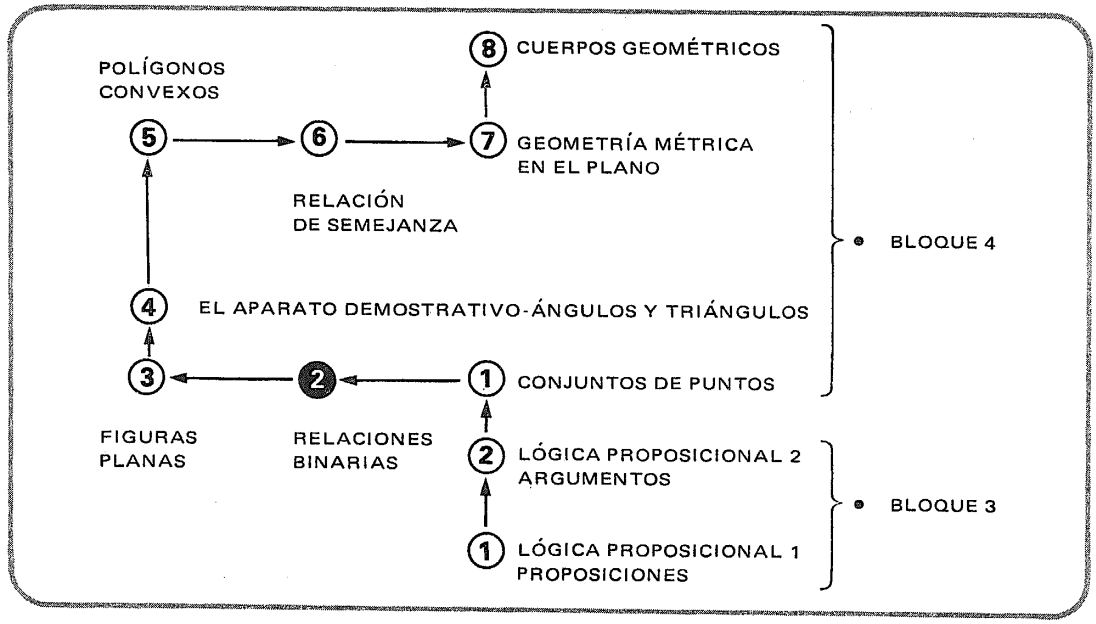
2.8 Relación de perpendicularidad

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 4. Geometría euclidiana

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

Esquema estructural del bloque 4



Módulo 2. Relaciones binarias

Objetivos: interpretar la igualdad, la congruencia, el paralelismo y la perpendicularidad como relaciones binarias

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Concepto de relación	2	7
• Nociones de lógica matemática	3	1, 2
• Conceptos geométricos básicos	4	1

2.1

Relaciones de equivalencia

1

Consideremos el conjunto

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

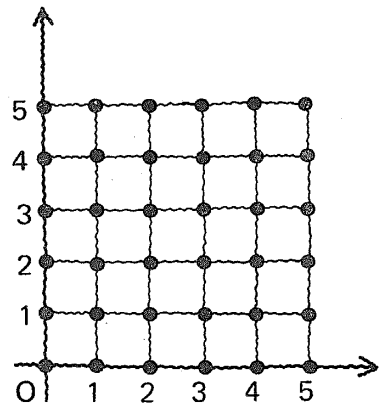
y recordemos que el producto cartesiano DXD o D^2 puede ser escrito por extensión, en la siguiente forma:

$D^2 = DXD =$ ⌊_____⌋

$\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5),$
$(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5),$
$(2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5),$
$(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5),$
$(4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5),$
$(5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

2

Recordemos, también, que es posible representar este producto cartesiano



3

Consideremos, ahora,

un subconjunto de DXD,

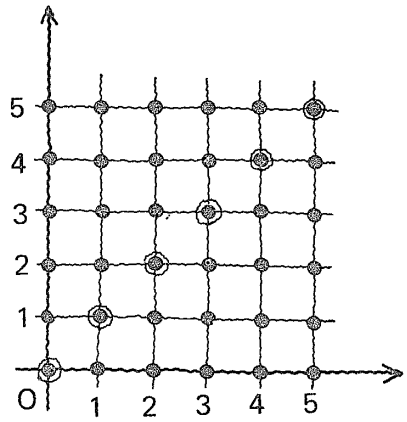
tal que,
el primer componente de cada par ordenado
sea igual al segundo componente.

Por extensión:

$\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

4

Señalemos con un pequeño
círculo los elementos
de este subconjunto de DXD.



5

Hemos llamado

relación

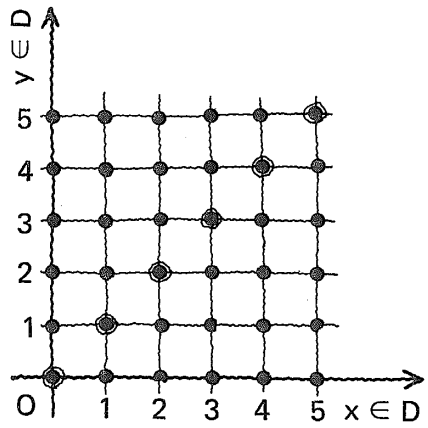
de AXB a un subconjunto
no vacío de AXB,
cuyos elementos cumplen
con una cierta condición.

6

$R_1 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

Si denotamos con *x* a un primer componente cualquiera y con la literal *y* a un segundo componente cualquiera, podemos escribir, por comprensión:

$R_1 =$ _____



$\{(x,y) | (x,y) \in DXD \wedge y = x\}$

7

Daremos el nombre de

relación binaria

a una relación definida en un producto cartesiano de un conjunto sobre sí mismo.

8

$$R_1 = \{(x,y) | (x,y) \in DXD \wedge y = x\}$$

Esta expresión representa una relación binaria.

9

$$R_1 = \{(x, y) | (x,y) \in DXD \wedge y = x\}$$

Esta es la expresión matemática
de lo que hemos llamado

regla de correspondencia

de la relación R_1.

10

$$R_1 = \{(x, y) | (x, y) \in DXD \wedge y = x\}$$

Ahora,
vamos a
introducir el símbolo

yRx

para representar la

regla de correspondencia
de cualquier
relación binaria.

11

Por razones
de brevedad,
en adelante
nos referiremos a la

relación binaria **yRx:**

con el significado de:

la relación binaria cuya regla
de correspondencia es yR_1x

12

Algunas formas que puede adoptar **R** en **yRx**

1. $y = x$ que se lee: ____
2. $y > x$ que se lee: ____
3. $y < x$ que se lee: ____
4. $y \geqslant x$ que se lee: ____
5. $y \leqslant x$ que se lee: ____

y es igual a x

y es mayor que x

y es menor que x

y es mayor o igual a x

y es menor o igual a x

13

	y	R	x
6.	y	es más alto que	x
7.	y	tiene mayor edad que	x
8.	y	es hijo de	x
9.	y	tiene la misma nacionalidad que	x
10.	y	gana a	x

14

Podemos hablar de las "relaciones":

1. $=$ ser igual a
2. $>$ ____
3. $<$ ____
4. $\geqslant$ ____
5. $\leqslant$ ____

ser mayor que

ser menor que

ser mayor o igual que

ser menor o igual que

15

Asimismo podemos hablar de las relaciones binarias:

1. ser más alto que
2. [ ]
3. [ ]
4. [ ]
5. [ ]

(Respuesta abierta.)

16

Estudiemos algunas

propiedades
de las relaciones binarias.

17

En la relación R_1 = "tener la misma edad que"

xR_1y se lee: [ ]

x tiene la misma edad que y

18

R_1 = "tener la misma edad que"

xR_1x se lee: ┌──────────┐

x tiene la misma edad que x
o
x tiene la misma edad que sí mismo.

19

Atención.

En la relación R_1 = "tener la misma edad que"

¿Se verifica xR_1x
para cualquier x?

Sí/No

Sí

20

Si R_2 = "ser más alto que"

xR_2x se lee: ┌──────────┐

¿Se verifica?

Sí/No

x es más alto que sí mismo

No

21

Si se verifica **xRx**
decimos que
la "relación R" es

reflexiva

o que tiene la propiedad de

reflexividad.

22

Señalar las **"relaciones reflexivas"**:

1. ser igual a
2. ser mayor que
3. ser hermano de
4. ganar a
5. ser múltiplo de

1

5

23

Si no se verifica xRx
decimos
que la "relación R" es

no reflexiva,

o que

no tiene la propiedad de reflexividad.

24

Señalar las "relaciones no-reflexivas".

1. ser hijo de
2. ser igual o menor que
3. ser padre de
4. formar parte del mismo equipo que
5. ser divisible entre ($x \in R \wedge x \neq 0$)

1

3

4.2.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

25

R_3 = "ser contemporáneo de"

xR_3y se lee: [_____]

x es contemporáneo de y

26

R_3 = "ser contemporáneo de"

Si xR_3y
¿se verifica yR_3x?

Sí/No

Sí

27

R_4 = "ser el padre de"

Si xR_4y
¿se verifica yR_4x?

Sí/No

No

28

Si verificándose xRy
se verifica yRx

decimos que:

la relación R es

simétrica.

si no se verifica yRx
la relación R es

no-simétrica.

29

Señalar las relaciónes simétricas (S)
y las no-simétricas (NS).

		S	NS
1.	ser mayor que		
2.	ser menor o igual que		
3.	ser igual a		
4.	tener la misma edad que		
5.	ser padre de		
6.	ser hermano o hermana de		
7.	tener el cabello del mismo color que		
8.	hablar el mismo idioma que		
9.	tener el mismo padre que		
10.	ser diferente a		

NS
S
S
S
NS
S
S
S
S
S

4.2.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

30

R_S = "ser padre de"

xR_Sy se lee: _____

x es padre de y

31

R_5 = "ser padre de"

Si xR_5y
e yR_5z

¿Se verifica xR_5z?

Sí/No

No

32

R_6 = "ser igual a"

Si xR_6y
yR_6z

¿Se verifica xR_6z?

Sí/No

Sí

33

Si verificándose xRy
e yRz
se verifica xRz
decimos que
la relación R es

transitiva.

Si *no* se verifica xRz
la relación R es

no-transitiva.

34

Señalar las relaciones transitivas (T)
y las no-transitivas (NT).

		T	*NT*
1.	es mayor que		
2.	es menor que		
3.	es hijo de		
4.	es hermano o hermana de		
5.	es parecido a		
6.	tiene los ojos del mismo color que		
7.	está casado con		
8.	usa el mismo perfume que		
9.	habita la misma casa que		
10.	supera a		

T
T
NT
T
T
T
NT
T
T
T

4.2.1.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

35

Una relación que tiene las 3 propiedades enunciadas
se llama

relación de equivalencia.

36

Si se verifica
- xRx (reflexividad)
- $xRy \Rightarrow yRx$ (simetría)
- $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ (transitividad)

R es una

relación de equivalencia.

37

Señalar las propiedades que tiene cada una de las relaciones siguientes e indicar cuáles son relaciones de equivalencia.

1: Se cumple.
0: No se cumple.

	R	*S*	*T*	*E*
1. ser anterior a				
2. ser mayor que				
3. ser igual a				
4. tener el mismo apellido que				
5. ser menor que				
6. tener la misma estatura que				
7. ser hijo de				
8. ser hermano o hermana de				
9. estar casado con				
10. ir a la misma escuela que				
11. pertenecer a ($\in$)				
12. estar estrictamente incluido en ($\subset$)				

R	*S*	*T*	*E*
0	0	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	1	1	1
0	0	1	0
1	1	1	1
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0
0	0	1	0

4.2.1.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

4.2.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *recordar* lo que es una relación;
- *definir* una relación binaria;
- *utilizar* el símbolo xRy para representar la regla de correspondencia de una relación binaria;
- *señalar* las propiedades de una relación dada por su regla de correspondencia (reflexividad, simetría, transitividad);
- *identificar* las relaciones de equivalencia en un conjunto de relaciones binarias.

2.2

Relación de igualdad

38

Recordemos que
dos **conjuntos** son **iguales**

si y sólo si
tienen los mismos elementos.

39

Dos

conjuntos de puntos

serán

iguales

si y sólo si
tienen los mismos elementos.

40

En la relación de igualdad xRy
$R =$ "ser igual a".

Simbólicamente $x = y$

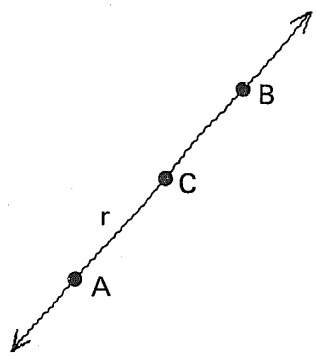
41

Señalar la opción correcta.

$\overleftrightarrow{AB} = r$ V/F

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ V/F

$\overleftarrow{AC} \cup \overleftarrow{CB} = \overleftarrow{AB}$ V/F



V

F

V

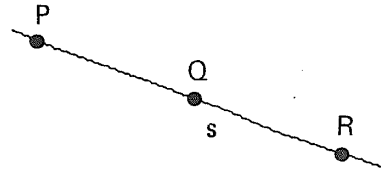
42

Señalar la opción correcta.

$\overleftarrow{PQ} = \overleftarrow{QP}$ V/F

$\overrightarrow{PQ} = \overleftarrow{QR}$ V/F

$\overleftarrow{PR} = \overleftarrow{RP}$ V/F



V

F

V

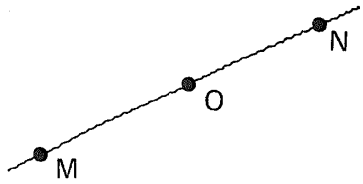
43

Señalar la opción correcta.

$\overline{MN} = \overline{NM}$ V/F

$\overline{MO} \cup \overline{ON} = \overline{MN}$ V/F

$\overline{MO} \cap \overline{ON} = \{O\}$ V/F



V

F

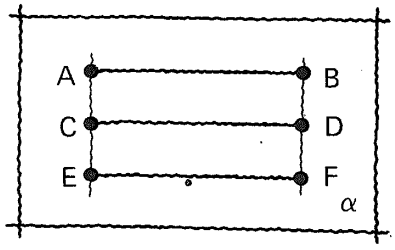
F

44

Señalar la opción correcta.

$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$ V/F

$\overleftrightarrow{CD} \neq \overleftrightarrow{EF}$ V/F

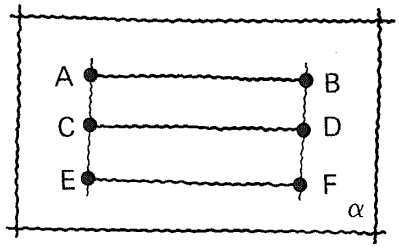


F

V

45

$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$
no representan el "mismo" conjunto de puntos;
sus elementos son diferentes.



46

"Ser igual a"

es una *"relación" de equivalencia*

que tiene las propiedades de:

- ⌊_____⌋
- ⌊_____⌋
- ⌊_____⌋

reflexividad

simetría

transitividad

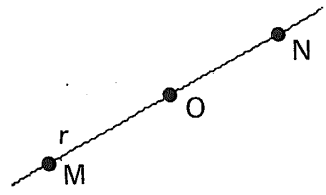
47

Por reflexividad:

$\overleftrightarrow{MN}$ = ⌊___⌋

$\overleftrightarrow{MO}$ = ⌊___⌋

$\overleftrightarrow{ON}$ = ⌊___⌋



$\overleftrightarrow{MN}$

$\overleftrightarrow{MO}$

$\overleftrightarrow{ON}$

48

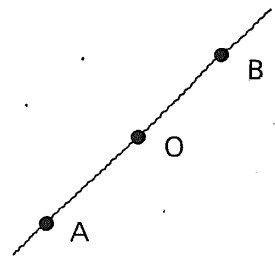
Señalar la opción correcta.

Por simetría:

Si $\overleftrightarrow{AO} \cup \overleftrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{AB}$

entonces

- $\overleftrightarrow{OB} \cup \overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{AB}$ ⌊__⌋
- $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AO} \cup \overleftrightarrow{OB}$ ⌊__⌋



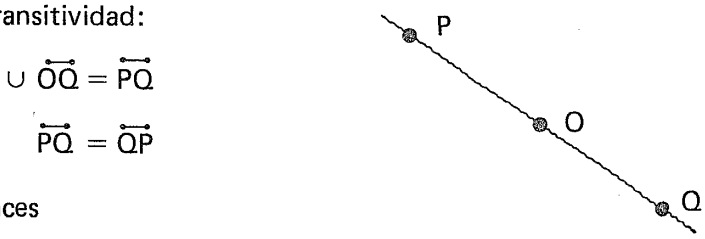
$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AO} \cup \overleftrightarrow{OB}$

Por transitividad:

Si $\overleftrightarrow{PO} \cup \overleftrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{PQ}$

y $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$

entonces



$\overleftrightarrow{PO} \cup \overleftrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{QP}$

4.2.2.1

Práctica adicional
si
se considera necesario.

4.2.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la igualdad como una relación de equivalencia;
- *aplicar* las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad para la trasformación de proporciones que expresan igualdad de dos conjuntos de puntos.

2.3

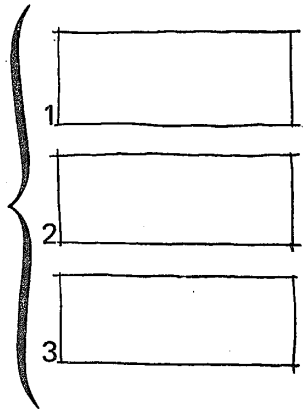
Relación de paralelismo

50

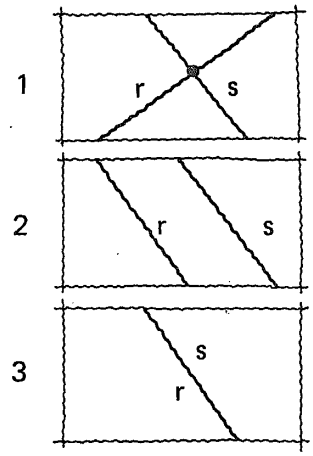
Consideremos dos rectas r y s
contenidas en un plano,
y la relación rRs en que

R = "intersecar a".

Puede ocurrir
alguna de estas
tres cosas.*



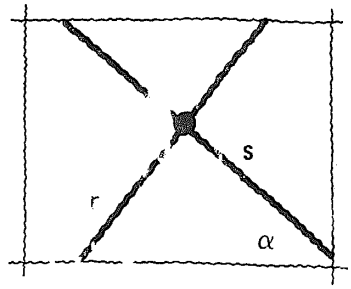
*Representar por medio de croquis.



51

Podemos intuitivamente afirmar que
si r y s son distintas
y r interseca a s,
la intersección está constituida
por

[ ] punto(s).



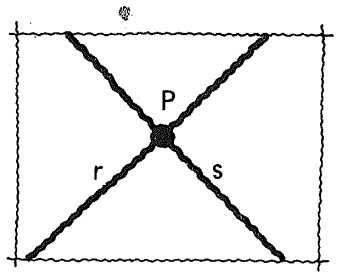
Indicar el número.

un

52

- $r \cap s = \{ P | P \text{ es único} \}$

Esto que nos parece obvio
debemos poder demostrarlo
a partir de los axiomas dados,
o bien,
establecerlo como axioma.



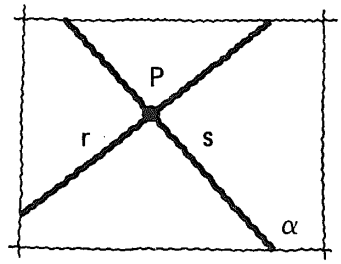
53

- $r \cap s = \{P\}$

Intentaremos
posteriormente la
demostración;
mientras tanto aceptaremos
como

conjetura

este hecho
que expresamos a través
de la siguiente
proposición condicional:



Si *dos rectas distintas*
en un plano se intersecan
entonces
su intersección es un
punto único

54

Expresión equivalente, referida al croquis del cuadro anterior.

$$\underbrace{r \subset \alpha \wedge s \subset \alpha}_{\text{(1)}} \wedge \underbrace{r \neq s}_{\text{(2)}} \wedge \underbrace{r \cap s \neq \phi}_{\text{(3)}} \Rightarrow \underbrace{r \cap s = \{P | P \text{ es único}\}}_{\text{(4)}}$$

(1) Las rectas están contenidas en mismo plano.

(2) Las rectas son diferentes.

(3) Las rectas se intersecan o su intersección es no vacía.

(4) Las rectas se intersecan en un punto único (P).

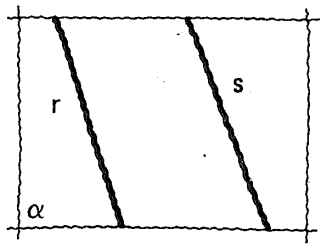
55

Ahora,
examinemos el caso
en que las dos rectas
no se intersecan.

rRs
o
"r no interseca a s",

es decir,

$r \cap s =$ [ ]



ϕ

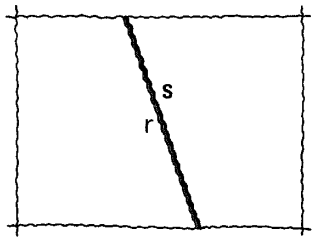
56

Atención.

En este otro caso

r [ ] s
R o R

o
"r [ ] a s".
interseca/no interseca



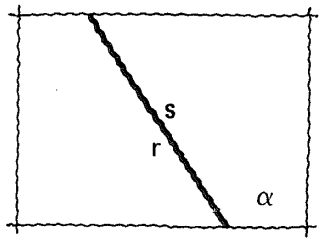
R

interseca

57

Además

r [ ] s



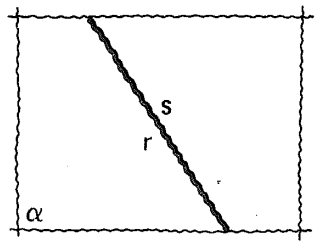
=

Indicar el signo que corresponda, de acuerdo con una cuidadosa observación de la figura.

58

Observemos que

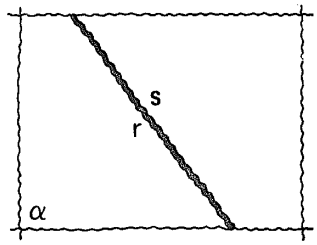
"r interseca a s"
y
$r = s$



59

Ahora bien,

$r \cap s =$ ⌊_____⌋



$r = s$

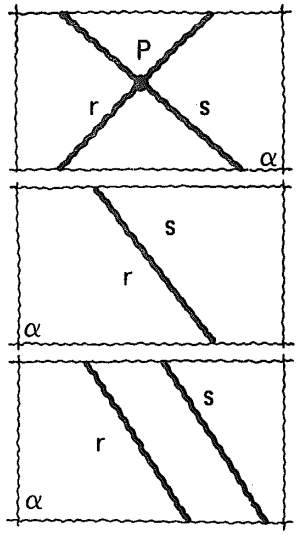
60

En resumen.

1. "r interseca a s" y $r \neq s$
   - $r \cap s = \{P | P \text{ es único}\}$

2. "r interseca a s" y $r = s$
   - $r \cap s = r = s$

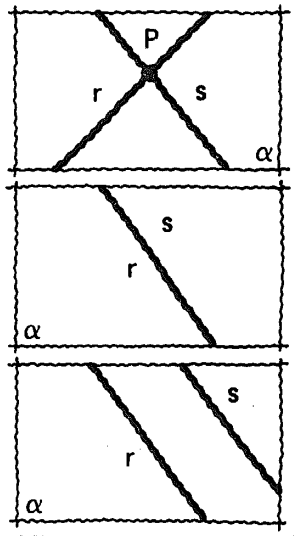
3. "r no interseca a s" y $r \neq s$
   - $r \cap s = \phi$



61

r y s son **concurrentes o intersecantes**

- **paralelas**
  - r y s son **coincidentes o iguales.**
  - r y s son **no coincidentes o distintas.**



62

Tenemos, entonces,
una nueva relación binaria de la forma xRy
en que R = "ser paralelo a"
y le llamamos

relación de paralelismo.

Simbólicamente: x ∥ y

63

La expresión

r ∥ s

se lee:

la recta r es paralela a la recta s

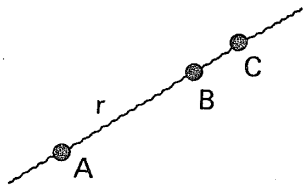
64

Hemos llamado

puntos colineales

a los que pertenecen
a una misma recta.

En relación con la figura.



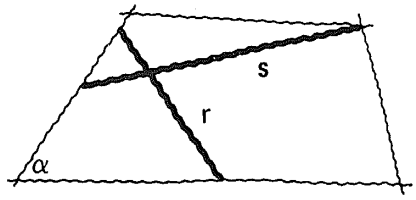
decimos que
A, B y C son
colineales.

65

Llamaremos, ahora,

rectas coplanares

a las que están incluidas
en un mismo plano.



r y s son coplanares.

66

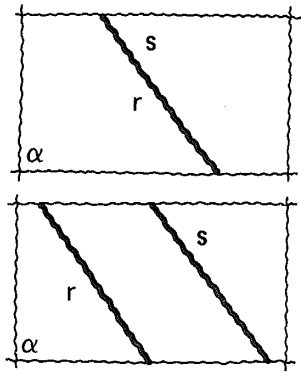
Atención.

Dos rectas coplanares son
paralelas
si y sólo si

_____

o

_____



no se intersecan

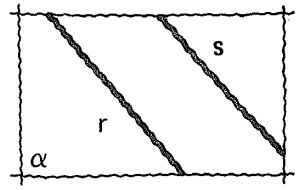
son iguales

67

Dos rectas coplanares

distintas

son paralelas
si y sólo si



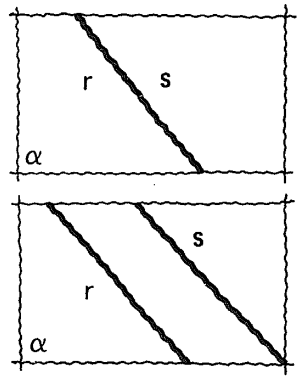
no se intersecan

68

Estudiar con atención.

$r \subset \alpha \wedge s \subset \alpha$

$r \parallel s \Leftrightarrow r \cap s = \phi \veebar r = s$



69

Ahora bien,
de acuerdo con la definición de paralelismo
que hemos establecido,
¿se verifica r || r?

Sí/No

Sí

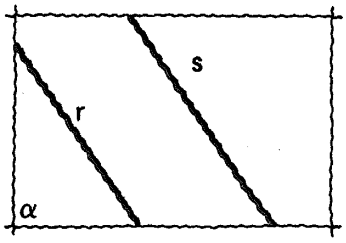
70

Entonces,
la relación de paralelismo es ⌊_____⌋

reflexiva

71

Si r ∥ s
¿se verifica s ∥ r?



Sí/No

Sí

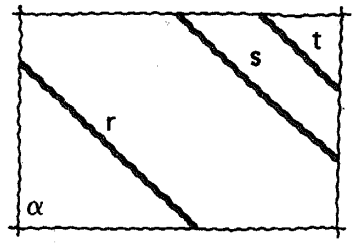
72

La relación de paralelismo es ⌊_____⌋

simétrica

73

Si r || s
y s || t
¿se verifica r || t?



Sí/No

Sí

74

La relación xRy
con R = "ser paralela a"

es [_____]

transitiva

75

Por tener las propiedades de:

- reflexividad
- simetría y
- transitividad

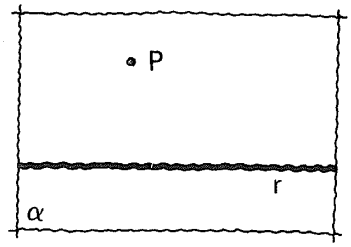
la relación de paralelismo es una

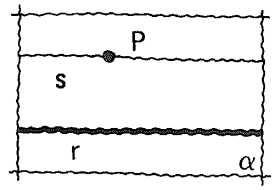
relación de [_____]

equivalencia

76

Consideremos
en el plano α:
una recta r
y un punto $P \notin r$.
Intuitivamente,
¿cuántas paralelas a r
que contengan a P
podemos trazar?





Una sola

77

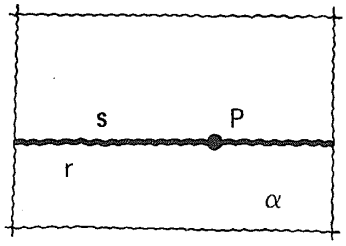
Si $P \in r$,
¿cuántas paralelas a r
que contengan a P
podemos trazar?

una sola

78

En este último caso

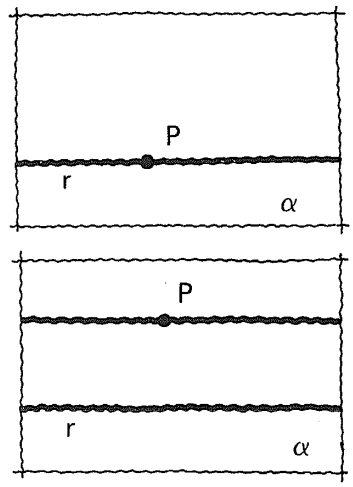
$r = s$
por lo tanto,
$r \parallel s$



Vamos a aceptar este hecho como nuestro

axioma 4.

Si r es una recta y P un punto, entonces existe una recta única que contiene a P y es paralela a r.



4.2.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* el paralelismo de rectas como una relación binaria de equivalencia.

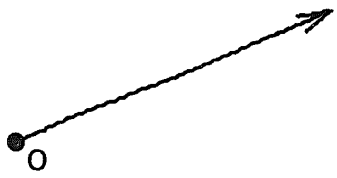
2.4

Ángulo

80

Esta es la representación

de un(a) ⌊___⌋

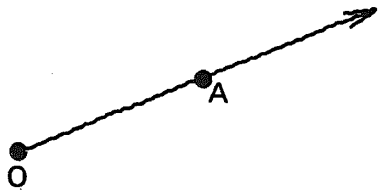


rayo

81

Simbólicamente:

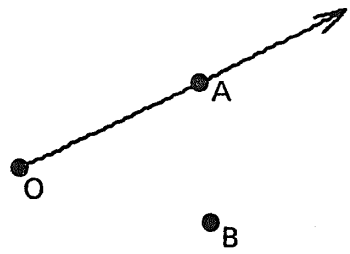
⌊___⌋



$\overrightarrow{OA}$

82

Consideremos otro rayo ($\overrightarrow{OB}$) teniendo el mismo origen.



Trazar el rayo OB.

83

A la figura así formada le llamaremos

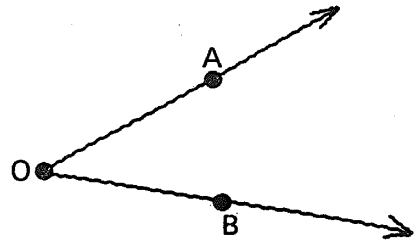
ángulo.

Al punto O le llamamos

vértice del ángulo,

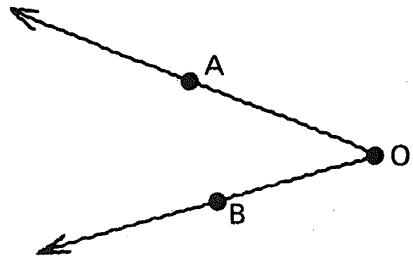
y a los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

lados del ángulo.



84

El símbolo: $\angle$ AOB representará al ángulo formado por los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con vértice O.



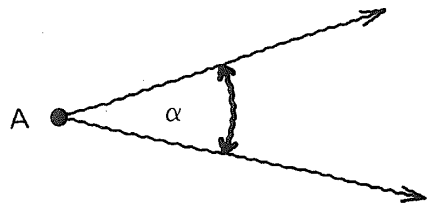
85

Otras notaciones:

$\angle \alpha$

o bien

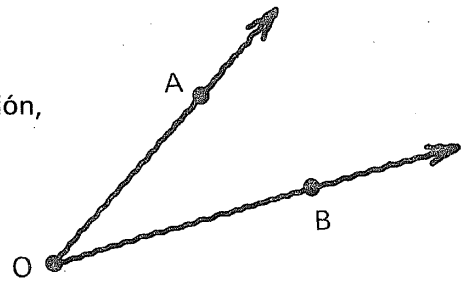
$\angle A$



86

De acuerdo con la definición, podemos escribir

$\angle AOB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$



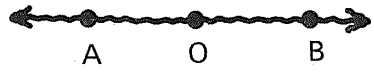
87

Dos rayos iguales
$\overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{OB}$
definen, también,
un ángulo
al que denominaremos,
por el momento,

ángulo nulo.

88

Aquí,
los dos rayos son opuestos,
y
definirán
lo que llamaremos



ángulo llano
o
ángulo de lados colineales.

89

Ahora bien,
¿podemos asegurar
que
todo ángulo, tal como lo hemos definido,
se encuentra contenido
en un
plano único?

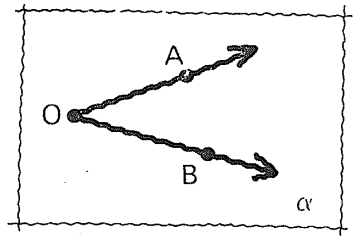
90

Consideremos los siguientes tres casos y señalar las opciones correctas:

Caso 1

- $\underbrace{(\angle AOB \subset \alpha)}_{V/F} \wedge \underbrace{\alpha \text{ es único.}}_{V/F}$

V/F



V V

V

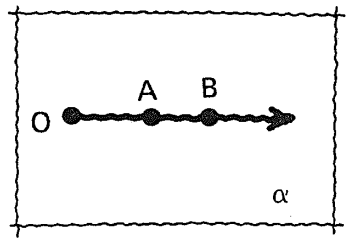
91

Caso 2

- $(\angle AOB \subset \alpha) \wedge \alpha$ único.

V/F V/F

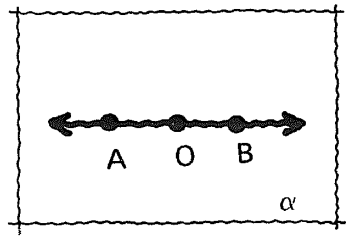
V/F



- $(\angle AOB \subset \alpha) \wedge \alpha$ es único.

V/F V/F

V/F



V F

F

V F

F

92

Atención.

1● $(\angle AOB \subset \alpha) \wedge \alpha$ es único.

V V

V

2● $(\angle AOB \subset \alpha) \wedge \alpha$ es único.

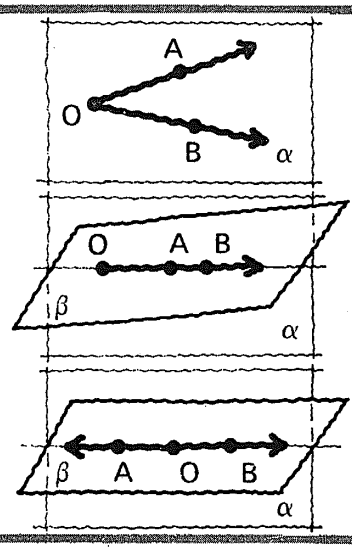
V F

F

3● $(\angle AOB \subset \alpha) \wedge \alpha$ es único.

V F

F



93

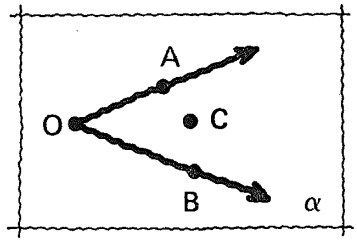
Conjetura 2

Un ángulo (no nulo, ni llano)
se encuentra contenido en un plano único.

94

Señalar la opción correcta.

- $A \in \angle AOB$ V/F
- $C \in \angle AOB$ V/F
- $B \in \angle AOB$ V/F
- $O \in \angle AOB$ V/F



V

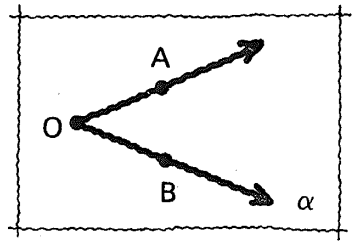
F

V

V

95

- $\vec{OA} \cup \vec{OB} =$ ⌊____⌋
- $\vec{OA} \cap \vec{OB} =$ ⌊____⌋



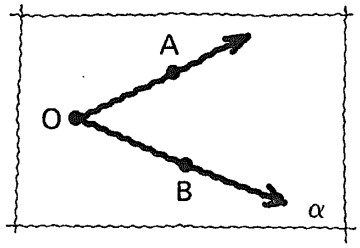
$\angle AOB$

$\{O\}$

96

Señalar la opción correcta.

- $\vec{OA} \subset \angle AOB$ V/F
- $\vec{OB} \subset \angle AOB$ V/F
- $\{O\} \subset \angle AOB$ V/F
- $\vec{OA} \subset \angle AOB$ V/F
- $\overleftrightarrow{OB} \subset \angle AOB$ V/F



V

V

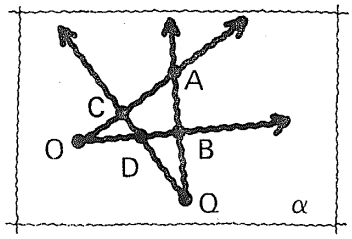
V

V

F

97

$\angle AOB \cap \angle COB =$ _____

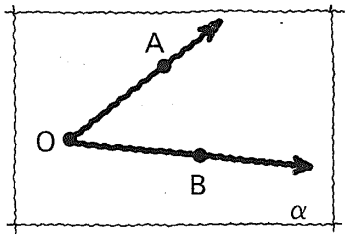


{A, B, C, D}

98

Señalar la opción correcta.

$\angle AOB = \angle BOA$ V/F



V

4.2.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

4.2.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* un ángulo como la unión de dos rayos con el origen común;
- *dar* los elementos de un ángulo;
- *señalar* la verdad o falsedad de una proposición indicando relaciones de pertenencia o inclusión de ángulos y otros subconjuntos del plano;
- *efectuar* operaciones de intersección o unión con ángulos y otros subconjuntos de un plano.

2.5

Medida
—noción intuitiva—

99

Consideremos
el segmento $\overleftrightarrow{AB}$.

Es posible hacerle corresponder
un cierto

número real no negativo

que llamamos

medida del segmento AB.

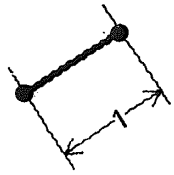
100

Lo anterior podemos lograrlo,
escogiendo un

segmento unitario

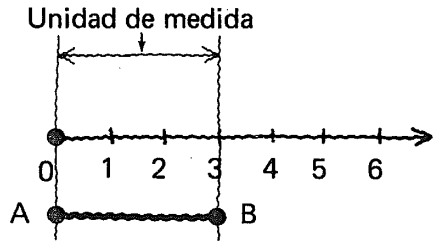
que será llamado

unidad de medida.



101

Observemos con atención.



La medida del segmento $\overleftrightarrow{AB}$ es 3.

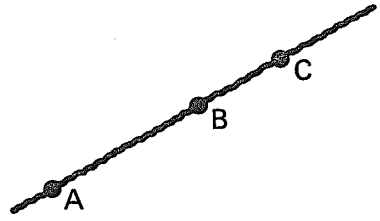
102

Usaremos el símbolo $|\overleftrightarrow{AB}|$
para representar
la medida del segmento $\overleftrightarrow{AB}$.

103

Sabemos que

$\overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{BC} =$ ⌊_____⌋



$\overleftrightarrow{AC}$

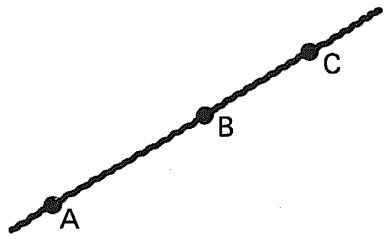
104

Estableceremos, ahora, que:

$|\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$

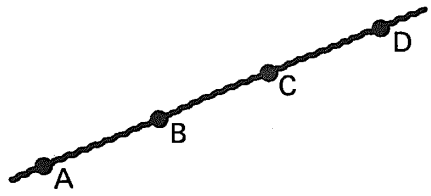
y

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$



105

$\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{BD} =$ ⌊_____⌋



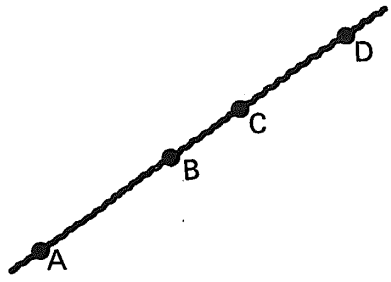
$\overrightarrow{AD}$

106

Establecemos:

$|\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AD}|$

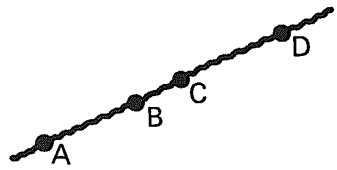
$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| - |\overrightarrow{BC}|$



107

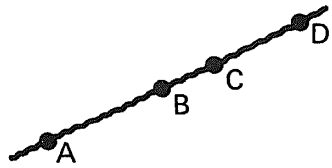
También

$|\overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{CD}| = |\overleftrightarrow{AB}| + |\overleftrightarrow{CD}|$



108

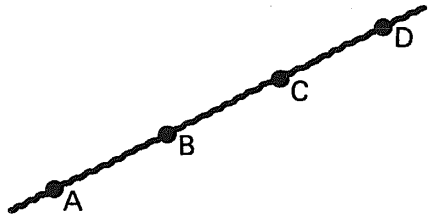
$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD} =$ ⌊‾‾‾‾⌋



$\overleftrightarrow{BC}$

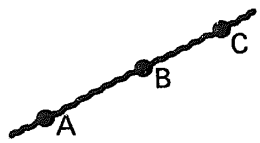
109

$|\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}| = |\overleftrightarrow{BC}|$



110

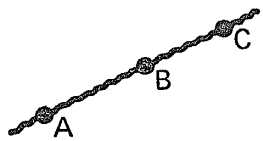
$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BC} =$ ⌊_____⌋



$\{B\}$ o $\overrightarrow{BB}$

111

$|\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BB}| =$ ⌊___⌋



0 (cero)

112

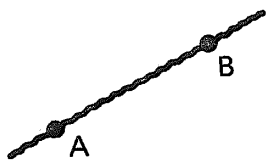
Atención.

- $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \overrightarrow{BB}$
- $|\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}| + |\overrightarrow{BB}|$

pero, como

$|\overrightarrow{BB}| =$ ⌊____⌋

$|\overrightarrow{AB}| =$ ⌊____⌋

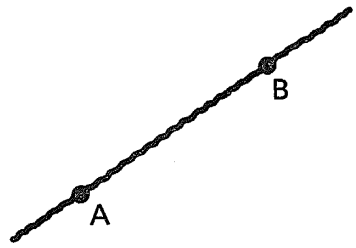


0

$|\overline{AB}|$

113

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftarrow{AB}|$



114

$\overleftrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \overleftrightarrow{AA} \cup \overleftrightarrow{BB}$

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overline{AB}| + |\overleftrightarrow{AA}| + |\overleftrightarrow{BB}|$

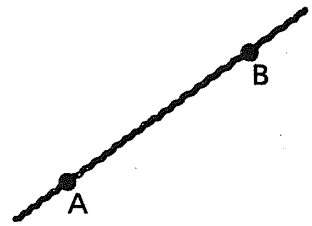
pero como

$|\overleftrightarrow{AA}| =$ ⌊___⌋

y

$|\overleftrightarrow{BB}| =$ ⌊___⌋

$|\overleftrightarrow{AB}| =$ ⌊_____⌋



0 (cero)

0 (cero)

$|\overline{AB}|$

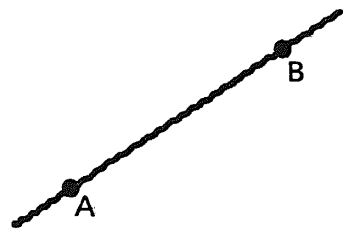
115

En resumen.

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overline{AB}| = |\overleftarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}|$

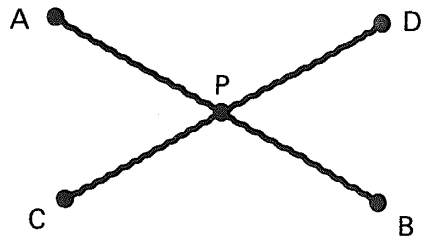
$|\overleftrightarrow{AA}| = 0.$

$|\overleftrightarrow{BB}| = 0.$



116

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} =$ ⌊___⌋



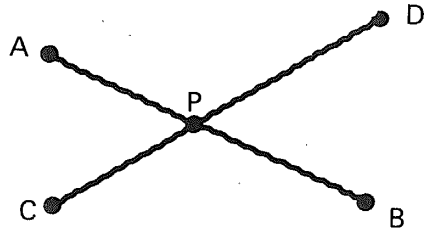
$\{P\}$ o $\overleftrightarrow{PP}$

117

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{PP}$

$|\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}| = |\overleftrightarrow{PP}|$

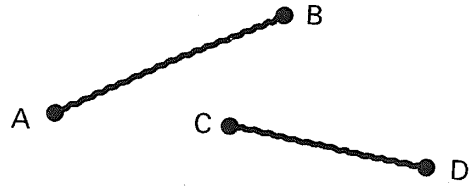
$|\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}| =$ ⌊__⌋



0

118

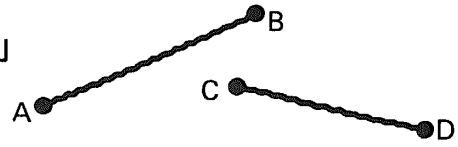
$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} =$ ⌊___⌋



ϕ

119

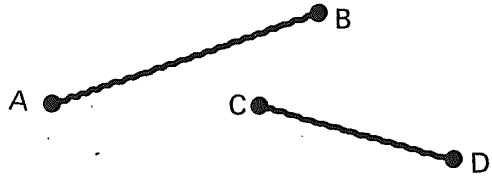
$|\overrightarrow{AB} \cap \overleftarrow{CD}| =$ ⌊_____⌋



0 (cero)

120

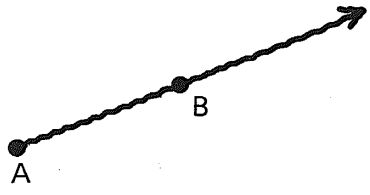
$|\overrightarrow{AB} \cup \overleftarrow{CD}| =$ ⌊_____⌋



$|\overrightarrow{AB}| + |\overleftarrow{CD}|$

121

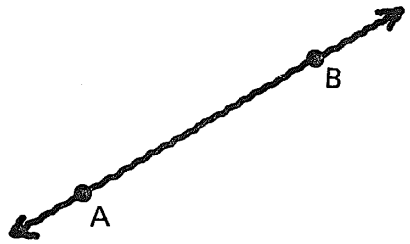
$|\overleftrightarrow{AB}| =$ ⌊_____⌋



no definida

122

$|\overleftrightarrow{AB}| =$ ⌊_____⌋



no definida

4.2.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

123

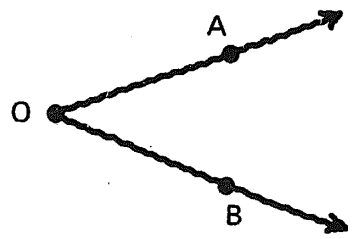
Consideremos, ahora,
el ángulo AOB.

Podemos hacerle
corresponder un

número real no negativo

que llamaremos

medida del ángulo AOB.



124

Usaremos
este símbolo $|\angle AOB|$
o éste $\measuredangle AOB$
para representar
la
medida del ángulo AOB.

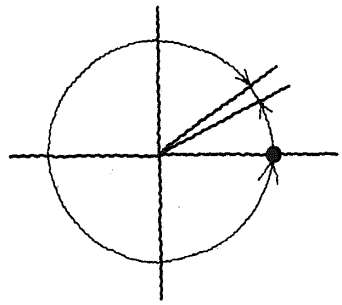
125

Una unidad de medida
frecuentemente usada
para ángulos
es el

grado,

que es 1/360 de lo que llamaremos

ángulo de una vuelta.



126

La médida de un

ángulo nulo

será igual a

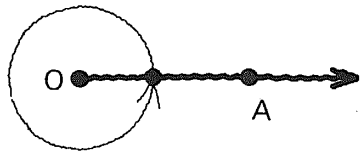
cero grados, o bien 0°

La medida de un

ángulo de una vuelta

será igual a

360°.



4.2.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* la noción intuitiva de medida a segmentos de recta;
- *determinar* la medida de la unión o de la intersección de dos segmentos;
- *aplicar* la noción intuitiva de medida a ángulos.

2.6

Relación de congruencia

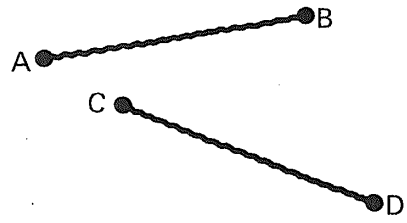
128

Consideremos dos segmentos: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ tales que

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftrightarrow{CD}|$

Decimos que

$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son congruentes o que $\overleftrightarrow{AB}$ "es congruente a" $\overleftrightarrow{CD}$.



129

Definición.

Dos segmentos son congruentes si y sólo si sus medidas son iguales.

130

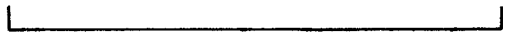
El símbolo $\approxeq$
se leerá: "es congruente a".

131

De modo que la expresión

$$\overleftrightarrow{AB} \approxeq \overleftrightarrow{CD}$$

la leeremos:



"el segmento AB es congruente al segmento CD"

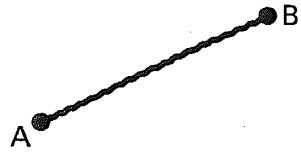
132

Hemos definido otra "relación" binaria
de la forma xRy
en que R = "ser congruente a".

133

¿Se verifica $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{AB}$?

Sí/No



Sí

134

Señalar la propiedad.

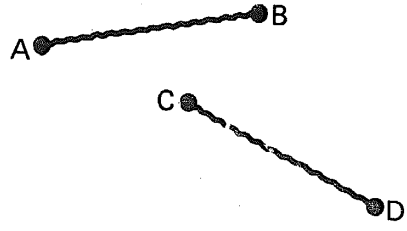
La relación de
congruencia de segmentos es [_____]

reflexiva

135

Si $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{CD}$
¿se verifica $\overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{AB}$?

Sí/No



Sí

136

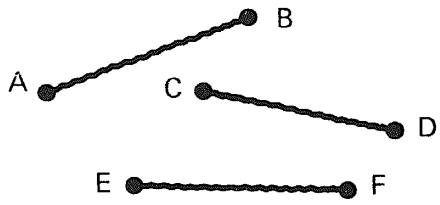
La relación de congruencia de

segmentos es [_____]

simétrica

137

Si $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{CD}$
y $\overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{EF}$
¿se verifica $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{EF}$?



Sí/No

Sí

138

La relación de congruencia de

segmentos es [_____]

transitiva

139

La congruencia de segmentos es:

- reflexiva,
- simétrica,
- transitiva

por lo que es una relación de [_____]

equivalencia

140

Atención.

No debemos confundir
la relación de

congruencia de segmentos

con
la relación de

igualdad de segmentos.

141

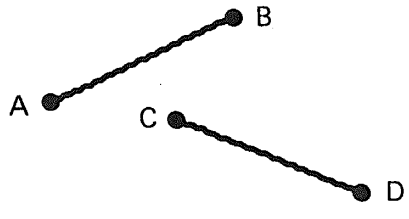
Dos

segmentos

son

congruentes

si y sólo si tienen las
misma medida.
En la figura:



$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$

142

Dos

segmentos

son

iguales

si y sólo si
constituyen el mismo
conjunto de puntos,
es decir, si tienen
los mismos elementos.

En la figura:
$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ representan el mismo conjunto de puntos:
$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$.

143

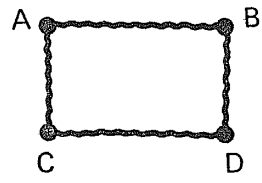
Supongamos que:

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftrightarrow{CD}|$

y

$|\overleftrightarrow{AC}| = |\overleftrightarrow{BD}|$

Señalar la opción correcta.



$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$	V/F	F
$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{CD}$	V/F	V
$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{AC}$	V/F	V
$\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BD}$	V/F	F
$\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{DC}$	V/F	V
$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BA}$	V/F	V

4.2.6.1

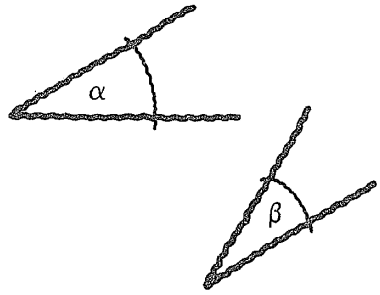
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

144

De manera similar,
dos ángulos son congruentes
si y sólo si
sus medidas son iguales.

$\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$

$\angle\alpha \sqcup\!\!\sqcup \angle\beta$



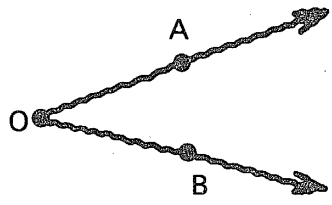
Escribir el signo que corresponda.

$\approx$

145

¿Se verifica
$\angle AOB \approx \angle AOB$?

Sí/No

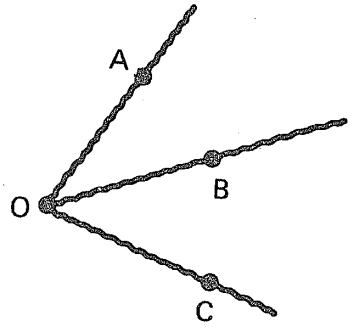


Sí

146

Si $\angle AOB \approx \angle BOC$
¿se verifica
$\angle BOC \approx \angle AOB$?

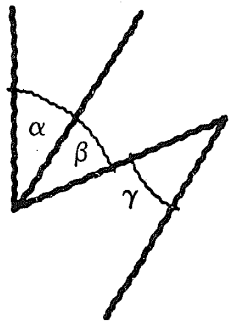
Sí/No



Sí

147

Si $\angle\alpha \approx \angle\gamma$
y
$\angle\alpha \approx \angle\beta$
¿se verifica
$\angle\gamma \approx \angle\beta$?



Sí/No

Sí

148

La congruencia de ángulos es una [_____]

relación de equivalencia
o
relación binaria de equivalencia

149

Si suponemos que:

$\measuredangle ABC = \measuredangle CDE$
$\measuredangle ABC \neq \measuredangle BCD$
señalar la opción correcta

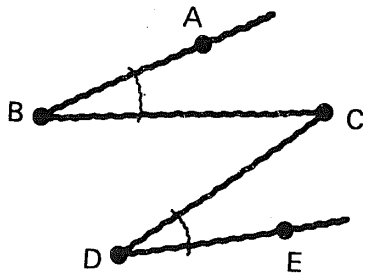
$\angle ABC = \angle CDE$ V/F

$\angle ABC = \angle CBA$ V/F

$\angle CDE \approx \angle CBA$ V/F

$\angle ABC \approx \angle BCD$ V/F

$\angle BCD = \angle DCB$ V/F



F

V

V

F

V

4.2.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

4.2.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la congruencia de segmentos como una relación binaria de equivalencia;
- *interpretar* la congruencia de ángulos como una relación binaria de equivalencia.

2.7

Clasificación de los ángulos

150

Hemos visto que
dos rayos iguales definen un

ángulo nulo

cuya medida es igual a ⌞⌟
o un

ángulo de una vuelta

cuya medida es igual a ⌞⌟

0°

360°

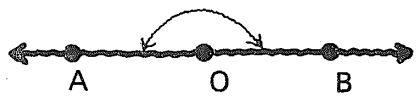
151

Dos rayos opuestos
definen un

ángulo llano.

Podemos establecer
intuitivamente que:

∡AOB = ⌞⌟

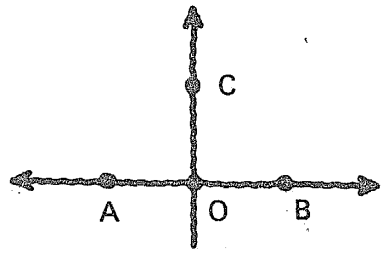


180° (360°/2)

152

Hemos trazado $\overleftrightarrow{OC}$
de tal manera que

$\measuredangle AOC = \measuredangle BOC =$ ⌞⌟



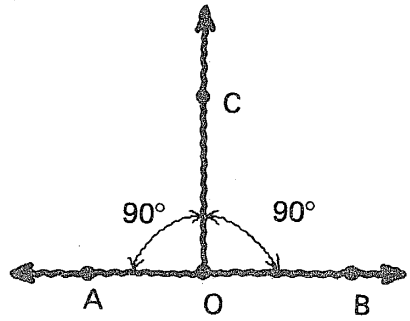
90° (180°/2)

153

Daremos el nombre de

ángulo recto

al que
tiene por medida
la mitad de la
medida de un
ángulo llano.



154

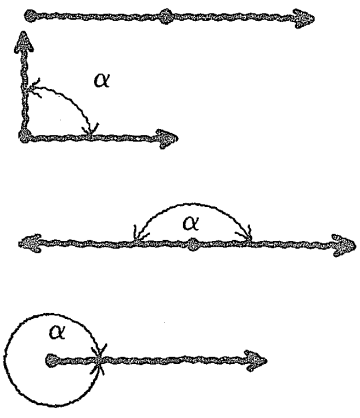
En resumen,
si consideramos el grado
como unidad de medida,
tenemos:

ángulo nulo $\measuredangle\alpha = 0°$

ángulo recto $\measuredangle\alpha = 90°$

ángulo llano $\measuredangle\alpha = 180°$

ángulo de una vuelta
$\measuredangle\alpha = 360°$



155

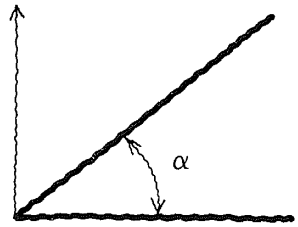
Ángulo agudo.

Un ángulo es

agudo

si y sólo si
su medida es menor que la
de un ángulo recto.

$\measuredangle\alpha < 90°$



156

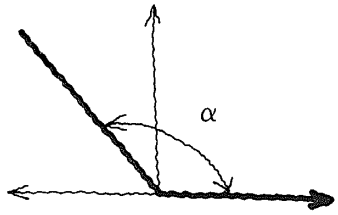
Ángulo obtuso.

Un ángulo es

obtuso

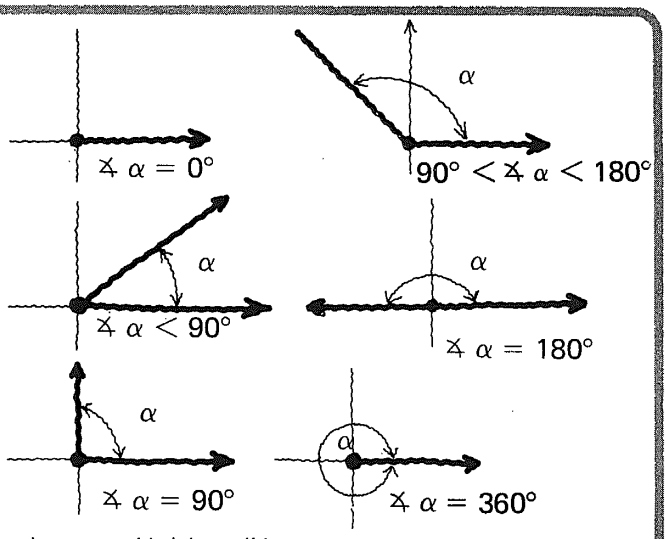
si y sólo si
su medida es mayor que la medida
de un ángulo recto y menor
que la medida de un ángulo llano.

$90° < \measuredangle\alpha < 180°$



157

Resumen*



*Utilizamos el grado como unidad de medida.

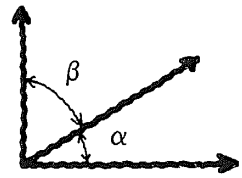
158

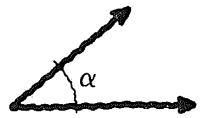
Ángulos complementarios.

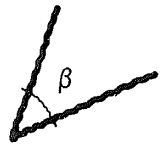
Dos ángulos son

complementarios

(o uno es complemento o complementario del otro) si y sólo si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo recto.







Tomando como medida el grado:

$\angle\alpha$ y $\angle\beta$ **son complementarios** $\Leftrightarrow \measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 90°$.

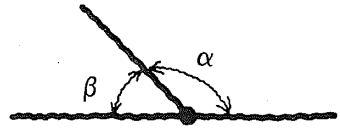
159

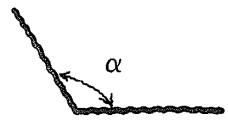
Ángulos suplementarios.

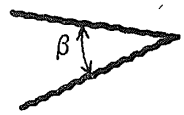
Dos ángulos son

suplementarios

(o uno es suplemento o suplementario del otro) si y sólo si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo llano.







Si la unidad de medida es el grado:

$\angle\alpha$ y $\angle\beta$ **son suplementarios** $\Leftrightarrow \measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 180°$

4.2.7.1

Práctica adicional de:

- *determinación* del equivalente en grados —minutos— segundos, de la medida de un ángulo dado en grados;
- *determinación* de la medida del complemento de un ángulo de medida dada en grados;
- *determinación* de la medida del suplemento de un ángulo de medida dada en grados;
- *operaciones* de suma y resta de números denominados de la forma A° B′ C″;

si se considera necesario.

4.2.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* si un ángulo de medida dada en grados es: nulo, agudo, recto, obtuso, llano o de una vuelta;
- *determinar* la medida del complemento o el suplemento de un ángulo de medida dada en grados;
- *efectuar* operaciones de suma o resta de números denominados de la forma: $A^\circ\ B'\ C''$;
- *determinar* el equivalente de la forma $A^\circ\ B'\ C''$ de la medida de un ángulo, dada en grados.

2.8

Relación de perpendicularidad

160

Dos

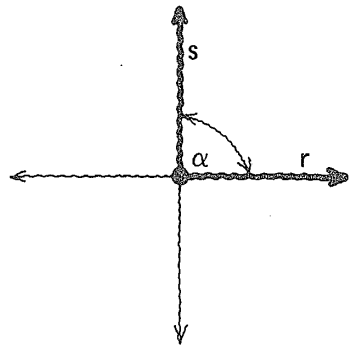
rectas

concurrentes son

perpendiculares

(o una es perpendicular
a la otra)
si y sólo si
determinan un ángulo recto.

r y s son
perpendiculares $\Leftrightarrow \measuredangle_{\alpha} = 90°$.



161

Podemos interpretar la

perpendicularidad

como una
relación binaria de la forma xRy
en que
R = "ser perpendicular a".

Simbólicamente: $x \perp y$

162

La expresión $r \perp s$
debe ser leída así:

_____

la recta r es perpendicular a la recta s

163

Ahora bien,
¿se verifica $r \perp r$?

Sí/No

No

164

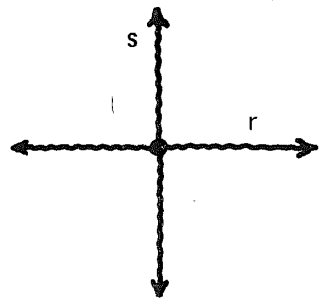
La relación de perpendicularidad

no es _____

reflexiva

165

Si $r \perp s$
¿se verifica $s \perp r$?



Sí/No

Sí

166

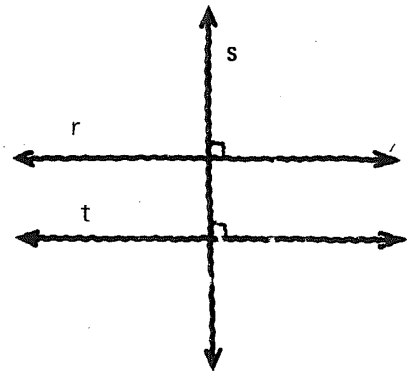
La relación de perpendicularidad

es [_____]

simétrica

167

Si $r \perp s$
y
$s \perp t$
¿se verifica $r \perp t$?



Sí/No

No

168

La relación de perpendicularidad

no es [_____]

transitiva

169

En resumen,
la relación de perpendicularidad

- no es reflexiva
- es simétrica
- no es transitiva

por lo tanto:

[_____] una relación de equivalencia.
es/no es

no es

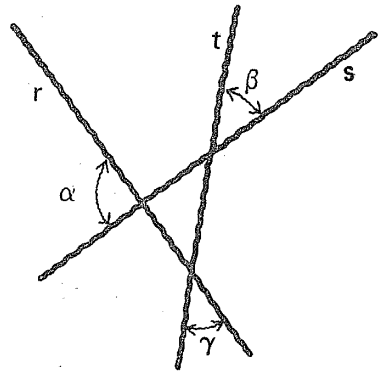
170

Supongamos que:

$\measuredangle \alpha = 90°$

$\measuredangle \beta = 60°$

$\measuredangle \gamma = 30°$



Señalar la opción correcta.

$t \perp s$ V/F

$r \perp s$ V/F

$r \perp r$ V/F

F

V

F

4.2.8.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

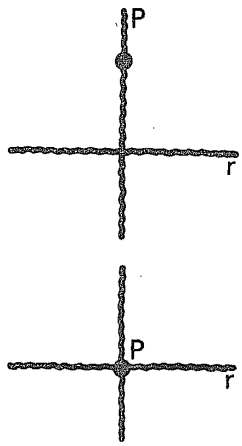
171

Para terminar:

estableceremos el

axioma 5.

Dados
una recta (r)
y un punto (P)
contenidos en un plano,
existe una única
perpendicular a r
que contiene a P.



4.2.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la perpendicularidad como una relación binaria (no de equivalencia);
- *enunciar* el axioma sobre la existencia y unicidad de la perpendicular.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de mayo de 1984,
en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,
Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MIA KC 100